Sur certains théorèmes d'interpolation

Par C. FOIAŞ à Bucarest et J. L. LIONS à Nancy

Introduction

Soient A_0 et A_1 (resp. B_0 et B_1) deux espaces normés contenus algébriquement et topologiquement dans un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$). On suppose, pour simplifier, que $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et dans A_1 (resp. que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1). Soit X (resp. Y) un troisième espace de Banach également contenu dans $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$) tel que $A_0 \cap A_1 \cap X$ (resp. $B_0 \cap B_1 \cap Y$) soit dense dans A_0, A_1 et X (resp. dans B_0, B_1 et Y). On dit que $\{X, Y\}$ est *un couple d'espaces d'interpolation pour* $\{A_i, B_i\}$ $(i=0,1)$ si toute application linéaire de $A_0 \cap A_1$ dans $B_0 \cap B_1$, continue de A_i dans B_i $(i=0,1)$, est automatiquement continue de X dans Y (de façon plus précise: peut se prolonger en une application linéaire continue de X dans Y). Dans le cas où $A_i = B_i$ $(i=0,1)$ et $X = Y$ on dit que X *est un espace d'interpolation pour* A_i $(i=0,1)$.

Par exemple, soit T un espace localement compact et soit $\mu \geqq 0$ une mesure sur T, $A_0 = B_0 = L^p_\mu(T)$ (espace des fonctions complexes de puissance p-ième μ-intégrable) et $A_1 = B_1 = L^q_\mu(T)$, avec $1 \leqq p < q < \infty$; alors d'après le théorème de M. RIESZ [12], $L^r_\mu(T)\,(p<r<q)$ est un espace d'interpolation pour $L^p_\mu(T)$ et $L^q_\mu(T)$.

Autre exemple: Soient M_0 et M_1 deux fonctions positives localement μ-intégrables sur T, soit $M_i \cdot \mu$ la mesure $g \to \int g M_i d\mu$ et $A_i = B_i = L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=1,2)$; dans ces conditions, d'après [13] et [14], $L^p_{M_0^\theta M_1^{1-\theta} \cdot \mu}(T)$ $(0<\theta<1)$ est un espace d'interpolation pour $L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=0,1)$.

On peut poser le problème de trouver "tous" les espaces d'interpolation, notamment pour les espaces $L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=1,2)$.

On va, dans une certaine mesure, répondre à cette question. On donnera un résultat, contenant à la fois un théorème d'interpolation de E. M. STEIN (cf. [13]), un théorème de E. HEINZ [6] (pour le cas des fonctions non bornées) et un théorème d'interpolation donné par l'un de nous dans le cas des espaces de Hilbert séparables [9] (résultat retrouvé indépendamment par S. G. Krein [8]; les méthodes de [9], [8] et la présente sont toutes différentes; pour le cas hilbertien, on consultera également N. Aronszajn [1]).

Dans le n° 1 nous introduisons la notion de mesure spectrale de type p.

Dans le n° 2 nous donnons le théorème général, et dans le n° 3 des applications et des variantes de ce théorème, ainsi qu'une liste de problèmes non résolus.

1. Mesures spectrales de type p

Soit $\mathfrak{B}$ un clan borélien de sous-ensembles d'un ensemble T, $\mathfrak{X}$ un espace de Banach (complexe), $\mathfrak{X}'$ son dual, $\langle x, x'\rangle$ la dualité entre $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, $|x|$ et $|x'|$ les normes sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, enfin $E=\{E(\sigma)\}_{\sigma\in\mathfrak{B}}$ une mesure spectrale[1]) dans $\mathfrak{X}$. Par définition, E est de type p $(1<p<\infty)$ si pour toute partition finie $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ de T et pour tout $x\in\mathfrak{X}$ on a

$$\sum_i |E(\sigma_i)x|^p=|x|^p. \tag{1.1}$$

Nous allons donner quelques faits, concernant les mesures spectrales de type p, qui sont analogues à quelques-uns bien connus dans le cas des mesures spectrales dans l'espace de Hilbert $(p=2)$. Comme leurs démonstrations sont des simples transpositions au cas général des démonstrations usuelles du cas particulier mentionné, nous les omettons.

Dans ce qui suit, E sera toujours supposé de type p $(1<p<\infty)$. Alors $E'=\{E(\sigma)'\}_{\sigma\in\mathfrak{B}}$ est de type p', où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ et pour tout $x\in\mathfrak{X}$, $\sigma\to|E(\sigma)x|^p$ est une mesure (bornée $\geqq 0$) sur T. Soit $M(t)$ $(t\in T)$ une fonction numérique $\mathfrak{B}$-mesurable. Il existe un opérateur U_M (dans $\mathfrak{X}$) linéaire fermé à domaine $D(U_M)$ dense, tel que

$$D(U_M)=\{x:\ x\in\mathfrak{X},\ M\in L^p_{|E(\cdot)x|^p}(T)\} \tag{1.2}$$

$$\langle U_M x, x'\rangle=\int_T M(t)\,d\langle E(t)x, x'\rangle, \qquad x\in D(U_M), \qquad x'\in\mathfrak{X}', \tag{1.3}$$

$$|U_M x|^p=\int_T |M(t)|^p d|E(t)x|^p, \qquad x\in D(U_M). \tag{1.4}$$

---

1) C'est-à-dire une application $\sigma\to E(\sigma)$ de $\mathfrak{B}$ dans l'algèbre $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ des opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{X}$, telle que (i) $E(\sigma_1\cap\sigma_2)=E(\sigma_1)E(\sigma_2)$, $\sigma_1, \sigma_2\in\mathfrak{B}$, (ii) $E(\emptyset)=0$, $E(T)=I$, (iii) $\sup\limits_{\sigma}|E(\sigma)|<\infty$ et (iv) $E(\sigma)x$ est dénombrablement additive (dans $\mathfrak{X}$) quel que soit $x\in\mathfrak{X}$. En ce qui concerne ces notions voir par exemple l'article d'exposition de Dunford [4].

De plus, on a

(1.5) $$|U_M| = \text{vrai max } |M(t)|$$

où le vrai maximum est pris par rapport à toutes les mesures $|E(\cdot)x|^p$, $x \in \mathfrak{X}$. On peut vérifier aussi que l'application $M \to U_M$ correspond au calcul fonctionnel de BADE [2][2]) qui généralise les propriétés du calcul fonctionnel de l'espace de Hilbert (aujourd'hui classique) de V. NEUMANN, comme par exemple $U_1 = I$, $U_0 = 0$ et

(1.6) $$U_{M_1} U_{M_2} = U_{M_1 M_2} \supseteq U_{M_2} U_{M_1}$$

(1.7) $$U_{M_1+M_2} = U_{M_1} + U_{M_2}$$

dès que la fonction M_2 est essentiellement[3]) bornée.

Pour $M(t)$ $\mathfrak{B}$-mesurable et essentiellement positive, posons $\mathfrak{D}_M^E = D\left(U_{\frac{1}{M^p}}\right)$ muni par la norme $|x|_M = \left|U_{\frac{1}{M^p}} x\right|$ et soit $\hat{\mathfrak{D}}_M^E$ l'espace de Banach complété pour cette norme. Il est utile de remarquer ici que si $M_0, M_1, \ldots, M_n$ sont telles fonctions, alors $\mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E \cap \ldots \cap \mathfrak{D}_{M_n}^E$ est dense dans $\mathfrak{X}$ et dans chaque $\hat{\mathfrak{D}}_{M_i}^E$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Exemple. Soit T un espace localement compact, $\mu \geqq 0$ une mesure sur T, $\mathfrak{B}_\mu$ le clan borélien des ensembles μ-mesurables de T, et soit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\mu$ un autre can borélien.

Posons $\mathfrak{X} = L_\mu^p(T)$ $(1 < p < \infty)$ et $E(\sigma)x = \chi_\sigma x$ $(x \in \mathfrak{X}, \sigma \in \mathfrak{B}$, χ_σ fonction caractéristique de $\sigma)$. On vérifie sans peine que $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in \mathfrak{B}}$ est une mesure spectrale de type p. De plus, si $M(t)$ est une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable localement μ-intégrable et μ-essentiellement positive, alors

(1.8) $$\hat{\mathfrak{D}}_M^E = L_{M\cdot\mu}^p(T).$$

2. Théorème d'interpolation

Soit $F = \{F(\sigma)\}_{\sigma \in \mathfrak{B}}$ une (autre) mesure spectrale de type p dans un espace de Banach $\mathfrak{Y}$[4]). Soient M_0 et M_1 deux fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables essentiellement[5]) positives.

---

[2]) Voir aussi [4].

[3]) Le terme "essentiellement" se réfère toujours à toutes les mesures $|E(\cdot)x|^p, x \in \mathfrak{X}$.

[4]) Dual $\mathfrak{Y}'$, dualité $\langle y, y' \rangle$, normes $|y|$, $|y'|$.

[5]) Par rapport à E et à F [voir la remarque[3])].

On appelle *fonction d'interpolation d'ordre p,* une fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1) > 0$ définie et continue sur $(0, \infty)\times(0, \infty)$[6]) telle que $\{\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}, \hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(M_0, M_1)}\}$ soit un couple d'espaces d'interpolation pour $\{\mathfrak{D}^E_{M_i}, \mathfrak{D}^F_{M_i}\}$ $(i=0, 1)$, quels que soient M_0, M_1, E et F.

Notre problème est alors la recherche des fonctions d'interpolation d'ordre p. Pour cela, introduisons les classes $\mathfrak{J}_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ des fonctions positives $\varphi(\lambda)$ $(0<\lambda<\infty)$ telles que

$$\text{(2. 1)} \qquad \frac{1}{\varphi(\lambda)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1+\lambda s)^\alpha},$$

où ν est une mesure $\geqq 0$ sur $(0, \infty)$ dépendant de φ, telle que

$$\text{(2. 1')} \qquad \int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1+s)^\alpha} < \infty.$$

Théorème. *Toute fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ homogène de degré 1, telle que $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{J}_{\frac{1}{p-1}}$, est une fonction d'interpolation d'ordre p.*

Démonstration. 1) Soit $W^E_\nu(M_0, M_1)$ l'espace des fonctions $s \to u(s)$ définies sur $(0, \infty)$ à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ telles que $u(s) \in L^p_\nu(0, \infty; \hat{\mathfrak{D}}^E_{M_0})$ et $s^{\frac{1}{p}} u(s) \in L^p_\nu(0, \infty; \hat{\mathfrak{D}}^E_{M_1})$, muni par la norme

$$\text{(2. 2)} \qquad |u|_W = \left[\int_0^\infty (|u(s)|_{M_0})^p d\nu(s) + \int_0^\infty s(|u(s)|_{M_1})^p d\nu(s)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il est utile de noter qu'en vertu de (1.4) et des définitions des espaces $\mathfrak{D}^E_M$, on a $u(s) \in \mathfrak{D}^E_{M_0+sM_1}$ $(0<s<\infty, \nu\text{-pp})$ et

$$\text{(2. 3)} \qquad |u|_W = \left[\int_0^\infty (|u(s)|_{M_0+sM_1})^p d\nu(s)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Inversement, si une fonction $s \to u(s) \in \mathfrak{X}$ vérifie ces dernières relations avec $|u|_W < \infty$ dans (2.3), alors $u \in W^E_\nu(M_0, M_1)$. Soit $\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1)$ l'espace de Banach complété de $W^E_\nu(M_0, M_1)$ et soit π une application linéaire de $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ dans $\mathfrak{D}^F_{M_0} \cap \mathfrak{D}^F_{M_1}$ appartenant à $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_i}; \hat{\mathfrak{D}}^F_{M_i})$[7]) $(i=0, 1)$. Evidemment

[6]) Par conséquent, $\Phi(M_0, M_1)$ est aussi $\mathfrak{B}$-mesurable et essentiellement positive.

[7]) $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ désigne l'espace des applications linéaires et continues de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, etc. Comme $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ est dense dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_j}$ $(j=1, 2)$, π détermine de façon unique (par continuité) un élément de $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_j}, \hat{\mathfrak{D}}^F_{M_j})$.

[voir (2.2)]

$$\bar{\pi} \in \mathfrak{L}(\overline{W}_\nu^E(M_0, M_1); \overline{W}_\nu^F(M_0, M_1)) \tag{2.4}$$

où $\bar{\pi}$ est définie sur $W_\nu^E(M_0, M_1)$ par $u(s) \to \pi u(s)$.

2) Pour $u \in C_0(0, \infty; \mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E)$ [espace des fonctions continues à support compact dans $(0, \infty)$ et à valeurs dans $\mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E$ muni par $|x|_{M_0} + |x|_{M_1}$, posons

$$Ju = \int_0^\infty u(s)\,d\nu(s). \tag{2.5}$$

Soit

$$\sigma_n(k_0, k_1) = \left\{ t \colon \frac{k_i}{2^n} \leqq M_i(t) < \frac{k_i+1}{2^n}, \quad i = 0, 1 \right\} \tag{2.6}$$

où $1 \leqq n, k_i < \infty$ sont des entiers et soit $\Phi_n(t)$ définie par $\Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right)$ si $t \in \sigma_n(k_0, k_1)$, $k_i = 1, 2, \ldots$. Alors $\{\Phi_n(t)\}$ est une suite non-décroissante tendant vers $\Phi(M_0(t), M_1(t))$. En utilisant successivement ce fait, les propriétés (1.6), (1.5) du calcul fonctionnel et les relations (2.1), (1.1), (2.3), on obtient:

$$(|Ju|_{\Phi(M_0, M_1)})^p = \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t))\,d|E(t)Ju|^p =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_T \Phi_n(t)\,d|E(t)Ju|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) |E(\sigma_n(k_0, k_1))Ju|^p =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) \left| \int_0^\infty U_{\chi_{\sigma_n(k_0,k_1)}(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p}}} E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)\,d\nu(s) \right|^p \leqq$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) \left[\int_0^\infty \operatorname*{vrai\,max}_{\sigma_n(k_0,k_1)} \frac{1}{[M_0(t) + sM_1(t)]^{\frac{1}{p-1}}}\,d\nu(s) \right]^{\frac{p}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty |E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) \leqq$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^{\infty} \int_0^\infty |E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) =$$

$$= \int_0^\infty |U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) = (|u|_W)^p,$$

d'où

$$|Ju|_{\Phi(M_0,M_1)} \leqq |u|_W. \tag{2.7}$$

En vertu de cette relation (qui montre que $Ju \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$), (2.5) se prolonge par continuité en une contraction (linéaire) de $\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1)$ dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$ [8]).

3) Soit

$$K_s(t) = [M_0(t) + sM_1(t)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Alors $K_s(t)$ (s fixé) est une fonction essentiellement bornée sur T. En vertu de (1.7), $U_{K_s} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$. De plus de

$$|U_{K_{s'}}x - U_{K_{s''}}x|^p = \int_T |K_{s'}(t) - K_{s''}(t)|^p d|E(t)x|^p$$

il résulte que $s \to U_{K_s}$ est une fonction continue dans la topologie de la convergence simple. Posons K^E: $x \to U_{K_s}x$ pour $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$; alors

$$(|K^E x|_W)^p = \int_0^\infty |U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} U_{K_s}x|^p d\nu(s) =$$

$$= \int_0^\infty \int_T [M_0(t) + sM_1(t)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{p}{p-1}} d|E(t)x|^p d\nu(s) =$$

$$= \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{[M_0(t) + sM_1(t)]^{\frac{1}{p-1}}} \right) d|E(t)x|^p =$$

$$= \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t)) d|E(t)x|^p = (|x|_{\Phi(M_0,M_1)})^p$$

et par suite

$$|K^E x|_W = |x|_{\Phi(M_0,M_1)}, \tag{2.8}$$

ce qui permet de prolonger K^E en une isométrie (linéaire) de $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$ dans $\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1)$, car en vertu de la continuité simple de U_{K_s}, de (2.8) il résulte que $K^E x \in W^E_\nu(M_0, M_1)$ dès que $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$.

Il est évident que $u_\varepsilon(s) = \chi_{\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]} K^E x$ vérifie les conditions de la remarque [8]) si $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ et que dans ce cas $u_\varepsilon(s) \to K^E x$ (dans

---

[8]) Remarquons que si $u(s)$ est une fonction continue dans $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\varepsilon > 0$) à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$, nulle en dehors de cet intervalle, alors Ju est donné aussi par l'intégrale $\int_0^\infty u(s)d\nu(s)$.

$\overline{W}_\nu^E(M_0, M_1))$ pour $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$ nous avons

$$JK^E x = \lim_{\varepsilon\to 0} Ju_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} U_{K_s} x\, d\nu(s) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} U_{\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} K_s d\nu(s)} x = U_{\int_0^\infty K_s d\nu(s)} x = U_1 x = x$$

d'où, par continuité, pour tout $x \in \hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$

(2. 9) $$JK^E x = x.$$

4) On va maintenant démontrer le théorème par une méthode indiquée dans [10].

Soit $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0, M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$. Alors $K^E x$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$. Soit $u_\varepsilon = \chi_{\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]} K^E x$. Alors $Ju_\varepsilon \in \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ et [voir la remarque[8])] nous avons $J\overline{\pi} u_\varepsilon = \pi J u_\varepsilon$, d'où, en utilisant (2. 9), on déduit par continuité

(2. 10) $$\pi x = J\overline{\pi} K^E x, \quad x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0, M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1},$$

où cette dernière fois $\overline{\pi}$ est considéré dans $\mathfrak{L}(\overline{W}_\nu^E(M_0, M_1); \overline{W}_\nu^F(M_0, M_1))$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. Remarques diverses

3. 1. Désignons par $|\pi|_M$ la norme de π dans $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_M; \hat{\mathfrak{D}}^F_M)$. Alors, en vertu du fait que dans $\mathfrak{L}(\overline{W}_\nu^E(M_0, M_1); \overline{W}_\nu^F(M_0, M_1))$ la norme de $\overline{\pi}$ est $\leqq \sup(|\pi|_{M_0}, |\pi|_{M_1})$, on déduit de (2. 10) l'inégalité suivante

(3. 1) $$|\pi|_{\Phi(M_0, M_1)} \leqq \sup(|\pi|_{M_0}, |\pi|_{M_1}).$$

3. 2. Soit $\nu \geqq 0$ une (autre) mesure sur T et soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mu \cap \mathfrak{B}_\nu$ (voir l'exemple du n°1). Soit $M_i(t)$ $(i = 0, 1)$ une fonction mesurable, essentiellement positive et localement intégrable par rapport aux mesures μ et ν. Alors en vertu de (1. 8) on déduit $\mathfrak{D}^E_{M_i} = L^p_\mu(T) \cap L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ et par suite d'après notre théorème on a:

Pour toute fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{J}_{\frac{1}{p-1}}$,

$$\{L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\mu}(T), L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\nu}(T)\}^{9)}$$

---

9) On a $\Phi(\lambda_0, \lambda_1) \leqq c(\lambda_0 + \lambda_1)$ où c est une constante; par conséquent $\Phi(M_0, M_1)$ est localement μ- et ν- intégrable donc $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$ et $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(M_0, M_1)}$ s'identifient à $L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\mu}(T)$, resp. $L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\nu}(T)$.

est un couple d'espaces d'interpolation pour $\{L^p_\mu(T) \cap L^p_{M_i \cdot \mu}(T),\ L^p_\nu(T) \cap L^p_{M_i \cdot \nu}(T)\}$ $(i=0, 1)$.

Comme $\Phi(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0^{1-\theta} \lambda_1^\theta$ $(0<\theta<1)$ est une pareille fonction $\left[\text{en fait } d\nu(s) = c s^{\frac{\theta}{p-1}-1} ds, \text{ où } \frac{1}{c} = \int_0^\infty (1+s)^{-\frac{1}{p-1}} s^{\frac{\theta}{p-1}-1} ds\right]$, le résultat ci-dessus généralise certains théorèmes d'interpolation de Stein [13] et Stein—Weiss [14].

3. 3. Notons d'abord ceci: si $\varphi \in \mathfrak{I}_\alpha$, alors

$$0 \leqq \frac{\lambda \varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \leqq 1.$$

En effet on déduit de (2. 1) que

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)^{1+\alpha}} = \int_0^\infty \frac{s}{(1+s\lambda)^{\alpha+1}} d\nu(s)$$

d'où

$$\frac{\lambda \varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \varphi(\lambda)^\alpha \int_0^\infty \frac{\lambda s}{1+\lambda s} \cdot \frac{1}{(1+\lambda s)^\alpha} d\nu(s) \leqq 1.$$

Il résulte de là que pour une fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{I}_\alpha$ on a

$$0 \leqq \lambda_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_0}\right) \Phi^{-1} \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}\right) \Phi^{-1} \leqq 1$$

car $\Phi(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \Phi\left(1, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$.

Ceci posé, considérons sur un ouvert Ω de R^n, deux fonctions M_0 et $M_1 > 0$, localement sommables avec $(D_i M_j) M_j^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, où $D_i = \partial/\partial x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2)$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω. On désigne par $H^{1,p}_{M_j}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que $M_j^{\frac{1}{p}} u$, $D_i(M_j^{\frac{1}{p}} u)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ soient dans $L^p(\Omega)$; il est équivalent de supposer que $M_j^{\frac{1}{p}} u$ et $M_j^{\frac{1}{p}} D_i u \in L^p(\Omega)$; on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{H^{1,p}_{M_j}(\Omega)} = \left[\int_\Omega M_j \left(|u|^p + \sum_{i=1}^n |D_i u|^p\right) dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend un espace de Banach.

La fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ étant définie comme ci-dessus, la fonction $x \to \Phi \cdot (M_0(x), M_1(x))$, que nous désignerons pour un instant par Φ, est localement sommable dans Ω, et

$$(D_i \Phi) \Phi^{-1} = (M_0^{-1} D_i M_0) M_0 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_0} \Phi(M_0, M_1) \right) \Phi^{-1} +$$

$$+ (M_1^{-1} D_i M_1) M_1 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Phi(M_0, M_1) \right) \Phi^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

On définit donc $H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)$ comme on a défini $H^{1,p}_{M_j}(\Omega)$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant:

Les fonctions M_j *et* $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ *étant données comme ci-dessus, avec* $\alpha = \dfrac{1}{p-1}$, *et* π *étant donnée, linéaire de* $H^{1,p}_{M_0}(\Phi) \cap H^{1,p}_{M_1}(\Omega)$ *dans* $L^p_{M_0}(\Omega) \cap \cap L^p_{M_1}(\Omega)$, *avec*

$$\|\pi f\|_{L^p_{M_j}(\Omega)} \leqq \omega_j \|f\|_{H^{1,p}_{M_j}(\Omega)} \qquad (j = 0, 1),$$

on a

$$\|\pi f\|_{L^p_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)} \leqq \omega \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)},$$

où ω *est une constante dépendant de* ω_0, ω_1 *et des maxima essentiels de* $M_j^{-1}(D_i M_j)$ $(j = 0, 1; i = 1, 2, \dots, n)$.

En effet, soit f donnée dans $H^{1,p}_{M_0}(\Omega) \cap H^{1,p}_{M_1}(\Omega)$, et soit

$$Kf(x, s) = u(x, s) = f(x)[M_0(x) + s M_1(x)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(x), M_0(x))^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'après la démonstration du théorème, tout revient à vérifier que u est dans l'espace W^1 des fonctions telle que

$$(M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u \in L^p_\nu(0, \infty; H^{1,p}(\Omega)),$$

où $H^{1,p}(\Omega)$ est défini comme $H^{1,p}_M(\Omega)$, avec $M = 1$, et que

$$\|Kf\|_{W^1} \leqq c_1 \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)}.$$

Il faut donc vérifier que $v_i = D_i((M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u)$ est dans $L^p_\nu(0, \infty; L^p(\Omega))$, de norme bornée dans cet espace par $c_2 \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)}$. Or v_i est somme de la fonction

$$\frac{1}{p} \left(\frac{D_i M_0 + s D_i M_1}{M_0 + s M_1} \right) (M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u$$

qui est majorée en module par $(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}|u|$ (d'où le résultat pour cette fonction d'après la démonstration du théorème) et de la fonction $(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}D_i u$.

Si donc W désigne l'espace des fonctions v telles que

$$(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}v\in L^p_\nu(0,\infty;L^p(\Omega)),$$

il faut vérifier que $D_i u\in W$ et que sa norme dans W est majorée par $c_3\|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0,M_1)}(\Omega)}$. Or $D_i u$ est somme de quatre fonctions:

(i) $$(D_i f)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}$$

qui a la propriété voulue, d'après la démonstration du théorème;

(ii) $$\left(-\frac{1}{p-1}\right)\frac{D_iM_0+sD_iM_1}{M_0+sM_1}(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}$$

ce qui se ramène au (i), puisque $(D_iM_0+sD_iM_1)(M_0+sM_1)^{-1}$ est dans $L^\infty(\Omega)$;

(iii) $$\frac{1}{p-1}\left(M_0\frac{\partial\Phi(M_0,M_1)}{\partial\lambda_0}\Phi^{-1}\right)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}};$$

(iv) $$\frac{1}{p-1}\left(M_1\frac{\partial\Phi(M_0,M_1)}{\partial\lambda_1}\Phi^{-1}\right)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Or les fonctions (iii) et (iv) se ramènent à (i) en utilisant les remarques du début relatives à $\lambda_j\dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_j}\Phi^{-1}$ $(j=0,1)$. D'où le résultat.

3.4. Supposons que $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ soient des espaces de Hilbert et soient A_0, A_1 (resp. B_0, B_1) deux opérateurs autoadjoints >0 dans $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), permutables entre eux. Soit E (resp. F) la mesure spectrale simultanée de A_0 et A_1 (resp. B_0 et B_1). Evidemment E (resp. F) est de type 2 et pour toute fonction continue $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)>0$ $(0<\lambda_0,\lambda_1<\infty)$ on a $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=$ $=\mathfrak{D}^E_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}_{\Phi(A_0,A_1)^{\frac{1}{2}}}$ [resp. $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}^F_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}_{\Phi(B_0,B_1)^{\frac{1}{2}}}$]. En particulier on a $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\lambda_j}=\mathfrak{D}_{A_j^{\frac{1}{2}}}$ (resp. $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\lambda_j}=\mathfrak{D}_{B_j^{\frac{1}{2}}}$) $(j=0,1)$. Par conséquent on a le corollaire suivant:

Pour toute fonction $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1,\lambda)\in\mathfrak{I}_1$, $\{\mathfrak{D}_{\Phi(A_0,A_1)^{\frac{1}{2}}},\mathfrak{D}_{\Phi(B_0,B_1)^{\frac{1}{2}}}\}$ est un couple d'espaces d'interpolation pour $\{\mathfrak{D}_{A_i^{\frac{1}{2}}},\mathfrak{D}_{B_i^{\frac{1}{2}}}\}$ $(i=0,1)$.

Dans le cas où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont séparables et $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0^{1-\theta}\lambda_1^\theta\,(0<\theta<1)$, ce résultat est donné dans [10].

3. 5. Appliquons le résultat précédent au cas suivant: $A_0 = B_0 = I$ (opérateur identique), $A_1 = A$, $B_1 = B$ et $\pi = I$. Alors en tenant aussi compte de (3. 1), on obtient le fait suivant:

Si $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ *et* $|B^{\frac{1}{2}}x| \leqq |A^{\frac{1}{2}}x|$ *pour tout* $x \in \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$, *alors* $\mathfrak{D}_{\varphi(A)^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{\varphi(B)^{\frac{1}{2}}}$ *et* $|\varphi(B)^{\frac{1}{2}}x| \leqq |\varphi(A)^{\frac{1}{2}}x|$ *pour tout* $x \in \mathfrak{D}_{\varphi(A)^{\frac{1}{2}}}$, *quelle que soit* $\varphi \in \mathfrak{F}_1$.

Ceci correspond à un théorème de HEINZ [6] sur les fonctions „monotones" d'opérateurs autoadjoints. En effet, E. HEINZ a montré que le fait ci-dessus est vrai quelle que soit la fonction $\varphi > 0$ définie sur $(0, \infty)$ qui se prolonge analytiquement sur tout le plan coupé par $(-\infty, 0)$ de manière que $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0$ pour $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Il est évident que toute fonction de $\mathfrak{F}_1$ (de plus, même de $\mathfrak{F}_\alpha$) jouit de cette propriété, mais on a aussi une implication inverse, notamment:

Toute fonction non-bornée $\varphi(\lambda)$ *définie sur* $(0, \infty)$ *qui se prolonge analytiquement sur tout le plan coupé par* $(-\infty, 0)$ *de manière que* $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0$ *pour* $\operatorname{Im} \lambda > 0$, *appartient à* $\mathfrak{F}_1$.

Posons $\psi(\xi) = [\varphi((1-\xi)(1+\xi)^{-1})]^{-1}$; alors $\psi(\xi)$ est définie sur $(-1, +1)$ et se prolonge analytiquement dans tout le plan coupé par $(-\infty, -1)$ et $(1, +\infty)$ de manière que $\operatorname{Im} \psi(\xi) > 0$ pour $\operatorname{Im} \xi > 0$. En vertu du théorème de représentation[10]) de ces fonctions, il existe une mesure positive μ sur $(-1, +1)$ telle que

$$\psi(\xi) = \psi(0) + \int_{-1}^{+1} \frac{\xi}{1-t\xi} \, d\mu(t) \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Comme $\varphi(\lambda) \to \infty$ pour $\lambda \to \infty$, nous obtenons

$$\psi(0) = \lim_{\xi \to -1} \int_{-1}^{+1} \frac{-\xi}{1-t\xi} \, d\mu(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+t} \, d\mu(t),$$

d'où

$$\psi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\xi+1}{(1-t\xi)(1+t)} \, d\mu(t) \qquad (-1 < \xi < 1). \tag{3.2}$$

Soit $s(t) = (1+t)(1-t)^{-1}$ et

$$\nu(\sigma) = \int_{s^{-1}(\sigma)} \frac{2}{(1-t)(1+t)} \, d\mu(t) \qquad (\sigma \subset (0, \infty) \text{ borélien}).$$

On vérifie sans peine que ν est une mesure borélienne sur $(0, \infty)$ satisfaisant

[10]) Pour une démonstration simple de cette représentation, voir [7].

(2. 1') avec $\alpha = 1$, et puis en vertu de (3. 2) et de la définition de $\psi(\xi)$, que $\varphi(\lambda)$ vérifie (2. 1) avec $\alpha = 1$, donc $\varphi \in \mathfrak{J}_1$.

Par conséquent notre thèorème a comme corollaire le théorème de Heinz sur les fonctions „monotones" d'opérateurs dans le cas des fonctions non bornées.

3. 6. Il est utile de noter que si A et B sont bornés, la remarque précédente peut être énoncée aussi comme il suit:

$$A \leqq B \text{ entraîne } \varphi(A) \leqq \varphi(B).$$

Cela justifie la terminologie utilisée auparavant.

En vertu des résultats de Löwner ([11], voir aussi [3]) sur les fonctions „monotones" de matrices, toute fonction φ vérifiant la relation ci-dessus, se prolonge en une fonction analytique dans tout le plan coupé par $(-\infty, 0)$, telle que $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0$ pour $\operatorname{Im} \lambda > 0$. D'après toute la discussion antérieure (voir 3. 5) il résulte que parmi les fonctions homogènes de degré 1 non bornées en λ_1, la classe de celles $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ telles que $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{J}_1$ est la plus large classe de fonctions d'interpolation d'ordre 2 vérifiant (3. 1). De plus, on a un résultat plus précis, notamment:

La classe des fonctions d'interpolation d'ordre 2 *qui sont non bornées en* λ_1 *et vérifient* (3. 1), *coïncide avec celle des fonctions* $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ *homogènes de degré* 1 *telles que* $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{J}_1$.

Ceci est une conséquence immédiate de la remarque qui suit.

3. 7. *Toute fonction d'interpolation d'ordre p vérifiant* (3. 1) *est homogène de degré* 1.

Démontrons d'abord que si $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ est une fonction d'interpolation d'ordre p vérifiant (3. 1), alors $\Phi(\lambda, \lambda) = \lambda \Phi(1, 1)$.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\Phi(1, 1) = 1$. Soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C^2$ normé par $[|c_0|^p + |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et soit $E(\sigma)$ $(\sigma \subset (0, \infty))$ défini de la manière suivante:

$$E(\{1\})(c_0, c_1) = (c_0, 0), \quad E(\{t_1\})(c_0, c_1) = (0, c_1)$$

(où $(c_0, c_1) \in C^2$ et $0 < t_1$ fixé $\neq 1$), $E(\sigma) = 0$ pour $\sigma \cap \{t_1, 1\} = \emptyset$, et par suite d'une manière évidente. On vérifie sans peine que $\{E(\sigma)\}$ est une mesure spectrale de type p. Posons $M_0(t) = M_1(t) = t$, $t \in (0, \infty)$. Alors $\hat{\mathfrak{D}}_t^E = \mathfrak{D}_t^E = C^2$ muni de la norme $|c|_t = [|c_0|^p + t_1 |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(t, t)} = \mathfrak{D}^E_{\Phi(t, t)} = C^2$ muni de la norme $|c|_{\Phi(t, t)} = [|c_0|^p + \Phi(t_1, t_1)|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$. En vertu de l'hypothèse faite pour toute transformation linéaire π de C^2 on a $|\pi|_t \geqq |\pi|_{\Phi(t, t)}$. Or ceci entraîne que $\Phi(t_1, t_1) = t_1$, en vertu du lemme suivant. *Soient* $|c|_a = [|c_0|^p + a|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ *et* $|c|_b = [|c_0|^p + b|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ *deux normes sur* C^2 *où* $a, b > 0$, *telles que pour toute transformation linéaire* π *de* C^2 *on ait* $|\pi|_b \leqq |\pi|_a$. *Alors* $a = b$. En effet soit $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ fixé, mais arbitraire et soit $\pi(c_0, c_1) = (c_0\xi_0, c_0\xi_1)$. Alors $|\pi|_a = |\xi|_a$ et $|\pi|_b = |\xi|_b$ donc $|\xi|_b \leqq |\xi|_a$ d'où $b \leqq a$. Il est évident que pour les normes $|c|'_a = [a^{-1}|c_0|^p + |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et $|c|'_b = [b^{-1}|c_0|^p + |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ on a $|\pi|_a = |\pi|'_a, |\pi|_b = |\pi|'_b$, et par conséquent on déduit $|\pi|'_b \leqq |\pi|'_a$, d'où résulte [en prenant $\pi(c_0, c_1) = (c_1\xi_0, c_1\xi_1)] b^{-1} \leqq a^{-1}$ donc $a \leqq b$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Par conséquent $\Phi(\lambda, \lambda) = \lambda\Phi(1, 1)$. En tenant compte du fait que pour $a_0, a_1 > 0$ fixés, $\Phi(a_0\lambda_0, a_1\lambda_1)$ est aussi une fonction d'interpolation d'ordre p, vérifiant (3. 1), on obtient d'après ce que nous avons déjà montré $\Phi(\lambda a_0, \lambda a_1) = \lambda\Phi(a_0, a_1)$ ce qui achève la démonstration de notre assertion.

3. 8. En conservant les notations des N^os 1 et 2, on a aussi le fait suivant (dont la démonstration est analogue à celle du théorème):

Si π *est un opérateur linéaire de* $\bigcap_{j=0}^{k} \mathfrak{D}_{M_j}^E$ *dans* $\bigcap_{j=0}^{k} \mathfrak{D}_{M_j}^F$ *continu de* $\hat{\mathfrak{D}}_{M_j}^E$ *dans* $\hat{\mathfrak{D}}_{M_j}^F$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, *alors* π *est également un opérateur linéaire continu de* $\hat{\mathfrak{D}}_{\Phi(M_0, M_1, \ldots, M_k)}^E$ *dans* $\hat{\mathfrak{D}}_{\Phi(M_0, M_1, \ldots, M_k)}^F$ *pour* Φ *vérifiant*

$$\frac{1}{\Phi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)^\alpha} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{d\nu(s_1, \ldots, s_k)}{(\lambda_0 + \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k)^\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{p-1}.$$

3. 9. Problèmes

a) L'ensemble des fonctions d'interpolation d'ordre p dépend-t-il de p?

b) Dans les conditions de l'énoncé du point 3. 3, considérons la classe de toutes les fonctions Φ, telles que

$$\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_0} \Phi^{-1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \Phi^{-1}$$

soient bornées, et telles que le théorème d'interpolation correspondant soit vrai. Retrouve-t-on ainsi la classe des fonctions d'interpolation d'ordre p?

c) Les espaces d'interpolation construits d'après notre théorème sont-ils des „espaces intermédiaires" au sens de [5]?

d) Notre théorème est-il encore vrai (au moins pour certaines fonctions Φ) lorsque E et F *ne sont pas* de type p?

Ouvrages cités

[1] N. Aronszajn, Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems. (A paraître.)

[2] W. G. Bade, Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 373—392.

[3] J. Bendat—S. Sherman, Monotone and convex operator functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 58—71.

[4] N. Dunford, A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217—274.

[5] E. Gagliardo, Interpolation d'espaces de Banach et application. II—III, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 3388—3390 et 3517—3518.

[6] E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Annalen*, **123** (1951), 415—438.

[7] A. Korányi, Note on the theory of monotone operator functions, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 241—245.

[8] S. G. Krein, An interpolation theorem in the theory of operators, *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, **130** (1960), 491—494.

[9] J. L. Lions, Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine*, **2** (1958), 419—432.

[10] J. L. Lions, Sur certains théorèmes d'interpolation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 2104—2106.

[11] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeitschrift*, **38** (1934), 177—216.

[12] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497.

[13] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482—492.

[14] E. M. Stein—G. Weiss, Interpolations of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.

(Reçu le 18 août 1960)